878. Algebra ニ於ケル Arithmetik ニツイテ

浅野　啓三（阪大）

Speiser, Brandt, Artin, Hasse 等ニヨル Algebra ニ於ケル整數論ガ公理的ニ基礎付ケラレルコトハ小生ノ一論文[1]デ論ジマシタ．ハジメニ先ヅ其ノ大要ヲ述べ，次ニコレニ関聯スル一問題ニツイテ考察シタイト思ヒマス。

§1.

$\mathfrak{r}$ ヲ Eins 1 ヲ有スル Schiefring トスル．乘法ニ関シ逆ヲ有スル $\mathfrak{r}$ ノ元ヲ正規元ト呼ブ。

Def. $\mathfrak{r}$ ノ Teilring $\mathfrak{o}$ ガ 1 ヲ含ミ，且ツ $\mathfrak{r}$ ノ任意ノ元 x ニ對シ，

$$\mathfrak{o}x\mathfrak{o}\alpha \subseteq \mathfrak{o}, \quad \beta\mathfrak{o}x\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}$$

トナル様ナ $\mathfrak{o}$ ニ属スル正規元 α, β ガ存在スルトキ，$\mathfrak{o}$ ヲ $\mathfrak{r}$ ノ Ordnung ト云フ。

$\mathfrak{o}$ ヲ $\mathfrak{r}$ ノ Ordnung トシ，$\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{r}$ ノ Teilmenge トスルトキ，$\lambda\mathfrak{M}\mu \subseteq \mathfrak{o}$ トナル正規元 λ, μ ガアレバ，$\alpha\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{M}\beta \subseteq \mathfrak{o}$ トナル $\mathfrak{o}$ ニ属スル正規元 α, β ガ存在スル。

---

(1) K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen. 輯報 16 (1939)

Def. $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ ヲ γ ノ Teilmodul トスルトキ,

$$\lambda\mathfrak{a}\mu \subseteq \mathfrak{a}', \quad \lambda'\mathfrak{a}'\mu' \subseteq \mathfrak{a}$$

トナル如キ正規元 $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ が存在スルナラバ, $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{a}'$ ハ äquivalent デアルト云フ。

1 ヲ含ム γ ノ Teilring $\mathfrak{o}'$ が Ordnung $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナラバ $\mathfrak{o}'$ ハ γ ノ Ordnung ニナル. $\mathfrak{o}'$ ヲ $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナ Ordnung ト云フ。

Def. Ordnung $\mathfrak{o}$ がソレト äquivalent ナ他ノ如何ナル Ordnung ニモ含マレナイトキ, $\mathfrak{o}$ ヲ Maximalordnung ト云フ。

Def. $\mathfrak{o}$ ヲ Ordnung トスル. γ ニ含マレル $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul ($\mathfrak{o}$-Linksmodul) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナルトキ, 即チ

$$\lambda\mathfrak{a}\mu \subseteq \mathfrak{o}, \quad \alpha \in \mathfrak{a}$$

ナル如キ正規元 λ, μ, α が存在スルトキ, $\mathfrak{a}$ ノコトヲ $\mathfrak{o}$-Rechtsideal ($\mathfrak{o}$-Linksideal) ト云フ。$\mathfrak{a}$ が同時ニ $\mathfrak{o}$-Rechtsideal 且ツ $\mathfrak{o}$-Linksideal ナルトキ $\mathfrak{a}$ ヲ zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal ト云フ。

$\mathfrak{a}$ ヲ Ordnung $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナ γ ノ Teilmodul トスルトキ, $\mathfrak{a}c \subseteq \mathfrak{a}$ トナル γ ノ元 c ノ全体ハ $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナル Ordnung $\mathfrak{o}_r$ ヲ作ル. 又 $c\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ トナル γ ノ元 c ノ全体ハ $\mathfrak{o}$ ト äquivalent ナル Ordnung $\mathfrak{o}_l$ ヲ作ル. $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{o}_r$-Rechtsideal デ且ツ $\mathfrak{o}_l$-Linksideal デアル。

Def. $\mathfrak{O}_r, \mathfrak{O}_l$ ヲ夫々 $\mathfrak{a}$ ノ Rechtsordnung, Linksordnung ト云フ. 特ニ $\mathfrak{O}_r, \mathfrak{O}_l$ ガ共ニ Maximalordnung ニナルトキ $\mathfrak{a}$ ノコトヲ normales Ideal ト呼ブ。

コレカラ一ツノ Ordnung ノミデナク互ニ äquivalent ナ Ordnungen ノ System ヲ取リ扱フ. ヨッテ特ニ断ラナイ限リ, 単ニ Ordnung ト云ヘバ或ル一定ノ Ordnung $\mathfrak{O}_0$ ト äquivalent ナ Ordnung ヲ意味スルモノトスル。

吾々ノ Axiom ハ次ノ通リ.

I. 少クトモ一ツノ Maximalordnung ガ存在スル。

II. 任意ノ Maximalordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テ ganze zweiseitige Ideale ($\mathfrak{O}$ ニ含マレル z. $\mathfrak{O}$-Ideale) ニ関シ Teilerkettensatz ガ成立スル。

III. 任意ノ Maximalordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テ Primideal $\mathfrak{p}$ ハ凡ベテ stark teilerlos デアル.[2]

---

(2) $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ニ含マレル z. $\mathfrak{O}$-Ideal トスル. $\mathfrak{O}$ ニ含マレル任意ノ z. $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ニ對シテ, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ ナラバ $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ 又ハ $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ トナルトキ, $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ Primideal ト云フ.

又 Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ ガ einfacher Ring トナルトキ, $\mathfrak{p}$ ハ stark teilerlos デアルト云フ. (次頁ヘツヾク)

以上ノ公理ニヨッテ Algebra ニ於ケル Arithmetik ガ基礎付ケラレル，特ニ次ノ事實ガ成立スル。

任意ノ Maximalordnung ニ關スル右及ビ左 Ideal ハ凡テ normales Ideal デアリ，normale Ideale ノ全体ガ eigentliche Multiplikation(3) ヲ結合法トシテ Gruppoid ヲ作ル。ソノ際 Maximalordnungen ガ Einheiten ヲナス。コノ Gruppoid ノ中デ同一ノ Maximalordnung ニ關スル zweiseitige Ideale ノ全体ハ乘法ニ關シあーべる群ヲ作リ，ソレハ Primideal ニヨッテ生成サレル無限巡回群ノ直積デアル。$\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ ヲ二ツノ Maximalordnungen トシ，$\mathfrak{C}$ ヲ $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ ヲ夫々左及ビ右ノ Ordnung トスル

（前頁ノ續キ）

stark teilerlos ナラバ Primideal デアルガ，逆ニ $\mathfrak{O}$ ノ primideal $\mathfrak{p}$ ハ $\mathfrak{O} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{O}$-Linksideal $\mathfrak{a}$ ニ關シ最小條件ガ成立スルトキニ限リ stark teilerlos デアル。

(3) γ ノ Teilmodul $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ ノ Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ニ於テ，$\mathfrak{a}$ 又ハ $\mathfrak{b}$ ヲソノ echter Teiler ナル Modul デ置キ代ヘ，然モ積ノ結果ヲ不変ナラシメルコトガ不可能ナルトキ，コノ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ナル Produkt ヲ eigentliches Produkt ト云ヒ，又カヽル乘法ヲ eigentliche Multiplikation ト云フ。$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ共ニ normales Ideal ナルトキニハ $\mathfrak{a}$ ノ Rechtsordnung ト $\mathfrak{b}$ ノ Linksordnung ガ一致スルトキ，ソノ時ニ限リ積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ハ eigentlich ニナル。

normales Ideal トスレバ $\mathfrak{a} \to \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ ニヨツテ z. $\mathfrak{o}$-Ideale ノ全体ハ z. $\mathfrak{o}'$-Ideale 全体ノ上ニ同型ニ移サレル. 且ツ此ノ同型對應ハ $\mathfrak{c}$ ノ取リ方ニハ依存シナイ. (此ノ對應ニヨル z. Ideale ハ互ニ zusammengehörig デアルト云フ)

更ニ此ノ逆ノ事實ガ成立スル. 即チ

γ ノ中ニ正規元ヲ含ム如キ Teilmodul $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\ldots, \mathfrak{o}, \ldots\ldots$ ノ System $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレテ居テ, コレニ關シ次ノ條件ガ成立スルモノトスル。

A. $\mathfrak{G}$ ハ gruppoid ヲナス. $\mathfrak{G}$ ノ元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ komposierbar ナラバ, $\mathfrak{G}$ ニ於ケル積 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ハ普通ノ Modulprodukt ト一致スル。

B. $\mathfrak{G}$ ノ Einheit ハ γ ノ Ordnung ヲナス。

C. $\mathfrak{o}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Einheit トスル. $\mathfrak{o}$ ニ含マレル $\mathfrak{o}$-Linksideal ハ $\mathfrak{o}$ ヲ Linkseinheit トスル $\mathfrak{G}$ ノ元デアル. 又 $\mathfrak{o}$ ニ含マレル $\mathfrak{o}$-Rechtsideal ハ $\mathfrak{o}$ ヲ Rechtseinheit トスル $\mathfrak{G}$ ノ元デアル。

然ラバ $\mathfrak{G}$ ノ Einheiten ノ全体ハ互ニ äquivalent ナル Maximalordnungen ノ全体ヨリ成リ, コレニ關シ公理 I, II, III ガ成立スル. 而シテ $\mathfrak{G}$ ハ normale Ideale 全体ノナス gruppoid ト一致スル。

γ ニ於テ以上ノ事實ガ成立スルトキ, γ ニ於テ Arithmetik ガ定義サレテ居ルト云フコトニスル。

γ ガ nilpotent ナ Radikal $\mathfrak{N}$ ヲ有シ,

$\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ ガ halbeinfacher Ring ニナル場合ニハ, $\mathfrak{o}$ ト共ニ

$$\mathfrak{o}^* = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}c\mathfrak{o}, \cdots\cdots, (\mathfrak{o}c\mathfrak{o})^{p-1})$$

$$(c \in \mathfrak{n},\quad \mathfrak{n}^p = 0)$$

ガ Ordnung ヲナスコトガ容易ニ示サレル. 従ッテ $\mathfrak{o}$ ガ maximal ナラバ $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^*$ トナリ, 結局 $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{n}$ トナル. 次ニ $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{o}$-Linksideal トスレバ, $\mathfrak{a}$ ハ正規元 α ヲ含ムカラ

$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{o}\alpha \supset \mathfrak{n}\alpha = \mathfrak{n}$$

カクテ凡テノ normale Ideale ガ Radikal $\mathfrak{n}$ ヲ含ム. ヨッテ Restklassenring $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ ヲ作リ, $\mathfrak{a}$ ノ代リニ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ヲ用フルコトニスレバヨイカラ, 始メカラ $\mathfrak{r}$ ヲ halbeinfach トシテオイテモ一般性ヲ失ハナイ. 更ニ halbeinfach ノ場合ハ容易ニ einfach ノ場合ニ帰着セシメラレル.

§2.

本節デハ $\mathfrak{r}$ ヲ特ニ einfache Algebra トシ, K ヲ $\mathfrak{r}$ ノ Zentrum トスル. K ニ於テ Arithmetik ガ定義サレテヰルトキ, 即チ K ガ或ル整域 $\mathfrak{o}$ ノ Quotientenkörper デ K ニ於ケル $\mathfrak{o}$-Ideale ガ群ヲナストキ, $\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{o}$ ニ関スル ganzes Element, 即チ $\mathfrak{r}$ ノ元デ $\mathfrak{o}$ ニ関シ algebraisch ganz ナル元ガ作ル Ring ノ中デ maximal ナモノガ存在シ, カヽル maximal

ナ Ring ヲ Maximalordnungen トスルヤウナ γ ノ Arithmetik ガ定義出來ルコトハ Algebra ノ整數論ニ於テ周知ノ事實デアル。[4] K ノ Arithmetik ハ上ノ様ナ意味デ γ ノ Arithmetik ニマデ擴張サレルワケデアルガ，然ラバ逆ニ γ ノ如何ナル Arithmetik モ K ニ於ケル或ル Arithmetik ヲ擴張スルコトニヨツテ得ラレルデアロウカ？ 答ハ肯定的デアル．コレヲ證明スルノガ本論文ノ目的デアル。

γ ニ於テ一ツノ Arithmetik ガ定義サレテヰルモノトスル。

Lemma 1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ ヲ zusammengehörig ナル zweiseitige Ideale トスレバ $[\mathfrak{a}, K]=[\mathfrak{a}', K]$. 特ニ $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ ヲ二ツノ Maximalordnungen トスレバ $[\mathfrak{o}, K]=[\mathfrak{o}', K]$.

(證明) $\mathfrak{a}'=\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ ナル $\mathfrak{c}$ ガアルカラ

$$[\mathfrak{a},K]\subseteq[\mathfrak{a},K]\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^{-1}[\mathfrak{a},K]\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{c}=\mathfrak{a}'$$

故ニ $[\mathfrak{a},K]\subseteq[\mathfrak{a}',K]$. 同様ニ $[\mathfrak{a}',K]\subseteq[\mathfrak{a},K]$

Q. E. D.

$[\mathfrak{o}, K]$ ハ Maximalordnung $\mathfrak{o}$ ノ取リ方ニハ關係セズニ確定スル．コレヲ $\mathfrak{o}$ デ表ハス。

Lemma 2. K ガ $\mathfrak{o}$ ノ Quotientenkörper デ且 K ニ於テ $\mathfrak{o}$ ヲ Hauptordnung トシテ Arithmetik ガ成立スルナラバ，γ ニ於テ與ヘラレタル Arithmetik ハ

---

(4) Deuring, Algebren 參照.

此ノKノArithmetikヲ拡張シタモノデアル。

（証明）γニ於テ與ヘラレタルArithmetikニ於ケルMaximalordnungヲ$\mathfrak{O}$デ表ハシ，又KノArithmetikヲ拡張シテ得ラレルγノArithmetikニ於ケルMaximalordnungヲ$\mathfrak{O}^*$デ表ハス．$\mathfrak{O}$ト$\mathfrak{O}^*$ガäquivalentニナルコトヲ示セバヨイ．先ヅ任意ノ$\mathfrak{O}^*$ハ適當ナ$\mathfrak{O}$ニ含マレル．$\mathfrak{O}_1$ヲγノ與ヘラレタルArithmetikニ於ケルMaximalordnungノ一ツトスレバ，$\mathfrak{O}^*$ハendlicher $\mathfrak{o}$-Modulデアルカラ$\mathfrak{O}^*\lambda \subseteq \mathfrak{O}_1$トナル正規元$\lambda$ガ存在スル．ヨツテ$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}^*$ハ$\mathfrak{O}_1$-Linksidealデアル．$\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}^*$ノRechtsordnungヲ$\mathfrak{O}$トスレバ$\mathfrak{O} \supseteq \mathfrak{O}^*$.

次ニ$\mathfrak{O} \neq \mathfrak{O}^*$トシテ矛盾ヲ生ズルコトヲ証明スル。$a \in \mathfrak{O}$, $a \bar{\in} \mathfrak{O}^*$トスレバ$\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{O}^*, \mathfrak{O}^* a \mathfrak{O}^*)$ハzweiseitiges $\mathfrak{O}^*$-Idealデ，$\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{O}^*$ダカラ$\mathfrak{c}^* = \mathfrak{a}^{*-1}$ハ$\mathfrak{O}^*$ト異ルganzes z. $\mathfrak{O}^*$-Idealデアル．$\mathfrak{c}^*$ノPrimteilerノ一ツヲ$\mathfrak{p}^*$トスレバ

$$\mathfrak{O} \supseteq \mathfrak{a}^* = \mathfrak{c}^{*-1} \supseteq \mathfrak{p}^{*-1}$$

$[\mathfrak{p}^*, K] = \mathfrak{z}$トスレバ$\mathfrak{z}\mathfrak{O}^* = \mathfrak{p}^{*e}$トナルカラ

$$\mathfrak{O} \supseteq \mathfrak{p}^{*-e} \supseteq \mathfrak{z}^{-1}, \quad \text{從ツテ} \quad \mathfrak{O} \supseteq \mathfrak{z}^{-1}$$

カクテ矛盾ヲ生ズル，故ニ$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}^*$．從ツテ両種ノMaximalordnungenハ互ニäquivalentニナル．Q. E. D.

簡單ノタメγノMaximalordnungenヲ

Index デ區別シテ，$\mathfrak{o}_i, \mathfrak{o}_j, \cdots\cdots$ 等デ示ス．又 $\mathfrak{o}_i, \mathfrak{o}_j$ ヲ夫々左及ビ右ノ Ordnung ニスル樣ナ normales Ideal ヲ $\mathfrak{a}_{ij}, \mathfrak{b}_{ij}, \cdots\cdots$ 等デ表ハス．特ニ又 $\mathfrak{o}_i$-Ideal ハ $\mathfrak{a}_{ii}, \mathfrak{b}_{jj}, \cdots\cdots$ デ表ハス．

今互ニ zusammengehörig ナ Primideal ノ System $\mathbb{P}$; $\mathfrak{p}_{ii}, \mathfrak{p}_{jj}, \cdots\cdots$ ヲ考ヘル．$\mathfrak{a}_{ij}$ ヲ任意ノ normales Ideal トシ

$$\mathfrak{c}_{ii}\, a \subseteq \mathfrak{a}_{ij}, \quad \mathfrak{c}_{ii} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{ii})$$

ナル ganzes Ideal $\mathfrak{c}_{ii}$ ガ存在スルヤウナ γ ノ元 a ノ全体ヲ $\mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}}$ デ表ハス．$\mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}}$ ハ又

$$a\,\mathfrak{c}_{jj} \subseteq \mathfrak{a}_{ij}, \quad \mathfrak{c}_{jj} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{jj})$$

ナル ganzes Ideal $\mathfrak{c}_{jj}$ ガ存在スルヤウナ γ ノ元 a ノ全体ト一致スル．特ニ $\mathfrak{o}_{i\mathbb{P}}$ ハ γ ノ Ordnung ヲナシ

$$\mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{i\mathbb{P}}\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{o}_{j\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{i\mathbb{P}}\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{o}_{j\mathbb{P}}$$

從ッテ $(\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{a}_{kl})_{\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{i\mathbb{P}}\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{a}_{kl}\mathfrak{o}_{l\mathbb{P}} = \mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}}\mathfrak{a}_{kl\mathbb{P}}$

今 $\mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}}$ ト $\mathfrak{a}_{kl\mathbb{P}}$ ハ $\mathfrak{o}_{j\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{k\mathbb{P}}$ ナルトキ，ソノ時ニ限リ komposierbar ト定義スレバ，コレニヨッテ $\mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}}$ ノ全体ガ Gruppoid $\mathfrak{G}_{\mathbb{P}}$ ヲ作リ，ソレガ γ ニ於ケル一ツノ Arithmetik ヲ定義スルコトハ容易ニ示サレル．尚凡テ $\mathbb{P}$ ニ亘ッテ $\mathfrak{a}_{ij\mathbb{P}}$ ノ Durchschnitt ヲ取レバ丁度 $\mathfrak{a}_{ij}$ ヲ得ル。

α ヲ K ノ 0 ナラザル元トシ

$$\alpha\mathfrak{o}_i = \mathfrak{p}_{ii}^{\nu}\mathfrak{a}_{ii}\ (\mathfrak{a}_{ii}, \text{ zu } \mathfrak{p}_{ii} \text{ prim})$$

$$\varphi(\alpha) = c^{\nu}\ (0 < c < 1), \quad \varphi(0) = 0$$

トスレバ，コレニヨッテKノnicht-archimedischナル diskrete Bewertung ガ定義サレルコトハ見易イ．コレハ$\mathfrak{o}_i$，$\mathfrak{P}_{ii}$ノ代リニ$\mathfrak{o}_j$，$\mathfrak{P}_{jj}$ヲ取ッテモ同ジデアル。今

$$\varphi(\alpha) \leqq 1, \quad \alpha \in K$$

トナルα全体ノナス整域ヲ$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$トスレバKハ$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ノQuotientenkörperデ$\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} = [\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}, K]$トナルコトハ明カデアル．$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ハHauptidealringデアルカラKニ於テ$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ヲHauptordnungトスルArithmetikガ成立スル。

従ッテLemma 2ニヨリ$\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ニヨッテ定義サレル$\gamma$ノArithmetikハ此ノKノArithmetikヲγニマデ拡張シタモノニ他ナラナイ。

Lemma 3. 任意ノganzes $\mathfrak{O}$-Linksideal $\mathfrak{a}$ハ0ナラザルKノ元ヲ含ム。

(証明) $\mathfrak{a}$ハ正規元aヲ含ム．aノMinimalpolynom

$$a^{t} + \alpha_1 a^{t-1} + \cdots\cdots + \alpha_t = 0 \quad (\alpha_i \in K)$$

ヲ取ルト$\alpha_t \neq 0$．$a \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$，且ツ$a$ハ$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ニ関シalg. ganz.デアルカラ$\alpha_i \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$．故ニ$\alpha_t \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}}$，従ッテ$\alpha_t \in \mathfrak{a}$.

Lemma 4. γノ任意ノ元xニ対シ，$\mathfrak{o}$ノ0ナラザル元αヲ適当ニ取レバ$x\alpha \in \mathfrak{O}$.

（証明） 先ヅ $x\mathfrak{O}\lambda \subseteq \mathfrak{O}$ ナル如キ $\mathfrak{o}$ ニ含マレル正規元 λ ガ存在スル．$\mathfrak{O}\lambda$ ニ含マレル 0 ナラザル K ノ元ヲ α トスレバ $x\alpha \in \mathfrak{O}$, $\alpha \in \mathfrak{O}$.

Lemma 5. K ハ $\mathfrak{o}$ ノ *Quotientenkörper* デアル。

（証明） $\alpha \in K$ ニ對シ $\mathfrak{o}$ ノ元 $\beta \neq 0$ ヲ適當ニトレバ $\alpha\beta \in \mathfrak{O}$. 従ッテ $\alpha\beta = \gamma \in \mathfrak{o}$. $\alpha = \frac{\gamma}{\beta}$ Q.E.D.

以上ノ結果ヲ利用シ K ニ於ケル $\mathfrak{o}$-*Ideale* ガ群ヲナスコトヲ証明スル．$\mathfrak{a}$ ヲ任意ノ $\mathfrak{o}$-*Ideal* トシ，$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}$ トスレバ，$\mathfrak{A}\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{O}) = \mathfrak{O}$. 故ニ

$$a_1\alpha_1 + \cdots\cdots + a_r\alpha_r = 1. \quad a_i \in \mathfrak{A},\ \alpha_i \in \mathfrak{a}$$

トナル a_i, α_i ガ存在スル．今 $x_1, \cdots\cdots, x_r$ ヲ互ニ独立ナル *Unbestimmte* トシ，$a_1x_1 + \cdots\cdots + a_rx_r$ ノ正規表現ノ *norm* ヲ取ル．

$$N(a_1x_1 + \cdots\cdots + a_rx_r)$$

$$= \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_r = n} \alpha_{\nu_1\cdots\nu_r} x_1^{\nu_1} \cdots\cdots x_r^{\nu_r}, \quad n = (\Gamma : K)$$

$\mathfrak{a}_\mathfrak{P} = \mathfrak{a}\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ ト置ケバ $\mathfrak{a}_\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{a}_\mathfrak{P} = \mathfrak{O}_\mathfrak{P}$．ヨッテ

$$(\mathfrak{a}_\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{P})\mathfrak{a}_\mathfrak{P} = \mathfrak{O}_\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_\mathfrak{P}\mathfrak{a}_\mathfrak{P}\,.$$

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{P} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{P}\mathfrak{O}_\mathfrak{P})^{-1} = \mathfrak{a}_\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{P}\,.$$

$\mathfrak{O}_\mathfrak{P}$ ハ *endlicher* $\mathfrak{o}_\mathfrak{P}$-*modul* ニナリ且ッ $\mathfrak{o}_\mathfrak{P}$ *Hauptidealring* デアルカラ，$\mathfrak{o}_\mathfrak{P}$ ニ關シ *Minimal-*

Basis ヲ有スル,

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{P}} = \mathfrak{o}_{\mathbb{P}} u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{o}_{\mathbb{P}} u_n$$

従ッテ $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-1} u_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-1} u_n$

今 $u_1, \cdots\cdots, u_n$ ヲ Basis トシテ正規表現ヲ作レバ, $\mathfrak{a}$ ノ元ナル a_i ニ對應スル行列 A_i ノ係數ハ $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-1}$ ニ屬スル. 故ニ

$$N(a_1x_1 + \cdots\cdots + a_rx_r) = \mathrm{Det.}(A_1x_1 + \cdots\cdots + A_rx_r)$$

$$= \sum \alpha_{\nu_1 \cdots\cdots \nu_r} x_1^{\nu_1} \cdots\cdots x_r^{\nu_r}$$

ヨリ $\alpha_{\nu_1 \cdots\cdots \nu_r} \in \mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-n}$. 従ッテ

$$\alpha_{\nu_1 \cdots\cdots \nu_r} \in \underset{\mathbb{P}}{\mathrm{D}} (\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-n}) \quad \left(\begin{array}{c}\text{凡テノ } \mathbb{P} \text{ ノ上ニ亘ル} \\ \text{Durchschnitt}\end{array}\right)$$

$x_1, \cdots\cdots, x_r$ ニ夫々 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ヲ代入スレバ

$$1 = \sum \alpha_{\nu_1 \cdots\cdots \nu_r} \alpha_1^{\nu_1} \cdots\cdots \alpha_r^{\nu_r} \in \underset{\mathbb{P}}{\mathrm{D}} (\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-n}) \mathfrak{a}^n.$$

$$\mathfrak{o} \subseteq \underset{\mathbb{P}}{\mathrm{D}} (\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-n}) \mathfrak{a}^n \subseteq \underset{\mathbb{P}}{\mathrm{D}} (\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-n} \mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{n}) = \underset{\mathbb{P}}{\mathrm{D}} (\mathfrak{o}_{\mathbb{P}}) = \mathfrak{o}$$

故ニ $\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \left(\mathfrak{b} = \underset{\mathbb{P}}{\mathrm{D}} (\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^{-n}) \mathfrak{a}^{n-1}\right)$. 即チ $\mathfrak{a}$ ハ Umkehrbar デアリ, K ニ於ケル $\mathfrak{o}$-Ideale ハ群ヲナス.

以上ニヨッテ吾々ノ主張ガ完全ニ證明サレタワケデアル。